2.2.25 Zlomkověda

Předpoklady: 020222

Př. 1: Napiš zlomky jako desetinné číslo.

a) $\frac{7}{5}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{11}{20}$ d) $\frac{5}{12}$

a) $\frac{7}{5}=\frac{7\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{14}{10}=1,4$

b) $\frac{5}{6}$: nejde rozšířit, ve jmenovateli je $6=2\cdot 3$ $\Rightarrow$ dělíme $\begin{array}{l} 5:6=0,83... \\ 50 \\ \ \ 20 \\ \ \ \ \ 2 \end{array}$ $\Rightarrow \frac{5}{6}=0,8\overline{3}$

c) $\frac{11}{20}=\frac{11\cdot 5}{20\cdot 5}=\frac{55}{100}=0,55$

d) $\frac{5}{12}$: nejde rozšířit, ve jmenovateli je $12=4\cdot 3$ $\Rightarrow$ dělíme $\begin{array}{l} 5:12=0,416... \\ 50 \\ \ \ 20 \\ \ \ \ \ 80 \\ \ \ \ \ \ \ 8 \end{array}$ $\Rightarrow \frac{5}{12}=0,41\overline{6}$

Př. 2: Zapiš desetinná čísla jako zlomky v základním tvaru. U zlomků, které má smysl psát jako smíšené číslo, zapiš i tvar smíšeného čísla.

a) $0,8$ b) $1,4$ c) $0,08$ d) $2,25$

a) $0,8=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

b) $1,4=\frac{14}{10}=\frac{7}{5}=1\frac{2}{5}$

c) $0,08=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}$

d) $2,25=2+\frac{25}{100}=2+\frac{1}{4}=2\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$

Př. 3: Jirka se rozhodl vědecky prozkoumat zlomky. Napsal si zlomek $\frac{p}{q}$, ve kterém byl čitatel i jmenovatel nahrazen písmenem. "Obě písmena mají význam žolíku, na jejich místo můžu dosazovat jakákoliv čísla.", vysvětluje.
Je pravda, že místo obou písmen může dosazovat libovolná čísla? Co se bude dít z velikostí zlomku, když bude za písmeno *p* dosazovat čím dál větší čísla? Co se bude dít s hodnotou zlomku, když bude čím dál větší čísla dosazovat místo písmene *q*?

Do zlomku $\frac{p}{q}$ můžeme dosadit:

- libovolné číslo za písmeno *p*,
- libovolné číslo různé od nuly za písmeno *q* (nesmíme dělit nulou).

$\Rightarrow$ píšeme jako podmínku $q\neq 0$.

Když budeme za písmeno p dosazovat čím dál větší čísla: $\frac{2}{5}; \frac{3}{5}; \frac{4}{5}; \ldots$, bude se hodnota zlomku $\frac{p}{q}$ zvětšovat (budeme mít čím dál větší počet stejných kousků) .

Když budeme za písmeno q dosazovat čím dál větší čísla : $\frac{2}{5}; \frac{2}{6}; \frac{2}{7}; \ldots$, bude se hodnota zlomku $\frac{p}{q}$ zmenšovat (budeme mít stejný počet čím dál menších kousků).

Zapisování pravidel pomocí písmen je v učebnicích běžné (používá se dokonce i v učebnicích pro základní školy). Pravidla zapsaná pomocí písmenek přinášejí velmi úsporný a přehledný zápis, bohužel pouze pro toho, kdo si pod písmenky dokáže něco konkrétního představit.

Proto budeme postupovat obráceně - nejdříve zkusíme pomocí písmenek zapsat pravidla, která známe a která si představit určitě umíme.
Stačí nám jedno základní pravidlo: Písmenka ve vzorečcích zastupují čísla $\Rightarrow$ pokud nevíme, jak dál s písmenky, napíšeme si místo nich čísla, provedeme úkol s čísly a výsledek nám ukáže, co máme udělat s písmenky.

Př. 4: Pepa se rozhodl, že Jirku ve vědeckosti troufne a začal všechno zapisovat pomocí písmenek. Doplň pravidla (nezapomeň na podmínky):

a) $r \cdot \frac{p}{q} =$ b) $\frac{p}{q} : x$ c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ d) $\frac{e}{f} : \frac{g}{h}$

a) $r \cdot \frac{p}{q}$ Zkoušíme na číslech: $3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5}$.

$r \cdot \frac{p}{q} = \frac{rp}{q}$, $q \neq 0$.

b) $\frac{p}{q} : x$ Zkoušíme na číslech: $\frac{2}{5} : 3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{5 \cdot 3}$.

$\frac{p}{q} : x = \frac{p}{q} \cdot \frac{1}{x} = \frac{p}{qx}$ $q \neq 0$, $x \neq 0$.

c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ Zkoušíme na číslech: $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7}$.

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ $b \neq 0$, $d \neq 0$.

d) $\frac{e}{f} : \frac{g}{h}$ Zkoušíme na číslech: $\frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 3}$.

$\frac{e}{f} : \frac{g}{h} = \frac{e}{f} \cdot \frac{h}{g} = \frac{eh}{fg}$, $f \neq 0$, $g \neq 0$, $h \neq 0$.

Pedagogická poznámka: K mému překvapení vymýšlení písmenkových vzorců žáky docela bavilo. Někteří pomoc čísel nepotřebovali, těm ostatním stačila ukázka bodu a) a zbytek dokázali sestavit sami. Téměř všichni pak správně napsali i podmínku v bodu d).

Pedagogická poznámka: Největším oříškem je následující příklad. Opět si po chvilce ukazujeme bod a), zejména je potřeba upozornit, že součin $2 \cdot 3$ nesmíme vyčíslit (a pak se zeptat proč). Stejně tak kladu po dokončení otázku, jaký význam má číslo *q*, kterým je vynásobené číslo *r* (převedení na společného jmenovatele).

Př. 5: Ani Honza nechtěl zůstat pozadu. A ihned se vytasil se sadou pravidel pro sčítání a odčítání (pravidlo pro násobení a dělení je totiž příliš jednoduchá). Doplň pravidla a nezapomeň na podmínky.

a) $\frac{p}{q}+r$ b) $x-\frac{y}{z}$ c) $\frac{p}{q}+\frac{r}{s}$ d) $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$

a) $\frac{p}{q}+r$ Zkoušíme na číslech: $\frac{2}{5}+3=\frac{2}{5}+\frac{3}{1}=\frac{2}{5}+\frac{3\cdot 5}{5}=\frac{2+3\cdot 5}{5}$.

$$\frac{p}{q}+r=\frac{p}{q}+\frac{rq}{q}=\frac{p+rq}{q},\ q\neq 0$$

b) $x-\frac{y}{z}$ Zkoušíme na číslech: $3-\frac{2}{5}=\frac{3}{1}-\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 5}{5}-\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 5-2}{5}$.

$$x-\frac{y}{z}=\frac{xz}{z}-\frac{y}{z}=\frac{xz-y}{z},\ z\neq 0$$

c) $\frac{p}{q}+\frac{r}{s}$ Zkoušíme na číslech: $\frac{3}{7}+\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 5}{7\cdot 5}+\frac{2\cdot 7}{5\cdot 7}=\frac{3\cdot 5+2\cdot 7}{5\cdot 7}$.

$$\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{ps}{qs}+\frac{rq}{sq}=\frac{ps+qr}{sq},\ q\neq 0,\ s\neq 0$$

d) $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ Zkoušíme na číslech: $\frac{3}{7}-\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 5}{7\cdot 5}-\frac{2\cdot 7}{5\cdot 7}=\frac{3\cdot 5-2\cdot 7}{5\cdot 7}$.

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{cb}{db}=\frac{ad-cb}{db},\ b\neq 0,\ d\neq 0$$

Př. 6: Doplň zápis tak, aby pomocí písmen zachycoval krácení zlomků: $\frac{a\cdot}{b\cdot c}=$

$$\frac{a\cdot \cancel{c}}{b\cdot \cancel{c}}=\frac{a}{b}$$

Př. 7: Zapiš pravidlo pro rozšíření zlomku $\frac{k}{l}$ číslem *m*.

$$\frac{k}{l}=\frac{k\cdot m}{l\cdot m}=\frac{km}{lm}$$

Př. 8: Které číslo můžeme napsat místo písmene *x*?

a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{x}=3$ b) $\frac{x}{15}\cdot\frac{10}{7}=\frac{8}{6}$ c) $\frac{1}{2}+\frac{x}{3}=\frac{7}{6}$

a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{x}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3\cdot3}{x}=\frac{2\cdot3}{x}=3 \Rightarrow x=2$ (aby se obě dvojky vykrátily $\frac{2\cdot3}{x}=\frac{2\cdot3}{2}=3$

b) $\frac{x}{15}\cdot\frac{10}{7}=\frac{x}{3\cdot5}\cdot\frac{2\cdot5}{7}=\frac{x\cdot2}{3\cdot7}$ $\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

$\frac{x\cdot2}{3\cdot7}=\frac{4}{3}=\frac{4\cdot7}{3\cdot7}$

$x\cdot2=28$

$x=14$

c) $\frac{1}{2}+\frac{x}{3}=\frac{7}{6}$

$\frac{1}{2}+\frac{x}{3}=\frac{1\cdot3}{2\cdot3}+\frac{x\cdot2}{3\cdot2}=\frac{3+2x}{6}=\frac{7}{6}$

$3+2\cdot x=7$

$x=2$

Shrnutí: Pravidla pro počítání můžeme snadno zapisovat pomocí písmenek. Pokud si nevíme rady, pomůžeme nám, když si za písmenka dosadíme čísla.